

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble dérivé A' , l'adhérence $\overline{A}$ et l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A dans les cas suivants :
 $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{R}$, A ensemble fini, $A =]a, b]$, $A = [a, b]$.
2. Soit D une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$:
 - a. Montrer que $\sup D \in \overline{D}$ et $\inf D \in \overline{D}$,
 - b. En déduire que : si D est fermé, alors $\sup D \in D$ et $\inf D \in D$.
 - c. Le réciproque de (b) est-elle vraie ?
3. Montrer que A est fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A .

Exercice 2.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on note pour $x \in \mathbb{R}$, $I(x, \varepsilon)$ l'intervalle centré en x et de rayon ε .

1. Définir point adhérent à A puis adhérence de A .
2. On donne dans la suite $A = [a, b]$. Montrer que $A \subset \overline{A}$.
3. Soit $x \in \overline{A} - A$.
 - a. Montrer que si $x < a$, en prenant $\varepsilon = \frac{a-x}{2}$, on a $A \cap I(x, \varepsilon) = \emptyset$
 - b. Montrer que si $x > b$, en prenant $\varepsilon = \frac{x-b}{2}$, on a $A \cap I(x, \varepsilon) = \emptyset$
 - c. En déduire que $\overline{A} \subset A$ puis déterminer $\overline{A}$.
4. Soit B une autre partie de $\mathbb{R}$ et A quelconque. On désigne par A' l'ensemble dérivé de A . En utilisant les relations $(A \cup B)' = A' \cup B'$, $A'' \subset A'$ et $\overline{A} = A' \cup A$, montrer que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 3.

Montrer que les ensembles suivants sont compacts :

1. $A = \{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
2. $B = \{e^{-n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
3. $C = \{\ln(2 + \frac{1}{n+1}), n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ln 2\}$.

Exercice 4.

1. A est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Donner la définition de « x est un point d'accumulation de A ».

2. On pose $A = \left\{ 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que 1 est un point d'accumulation de A .
3. On pose $B = [0; 4[\cup \{11\}$. Montrer que 11 n'est pas un point d'accumulation de A . Déterminer A' l'ensemble des points d'accumulation de A .
4. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.
 - a. Comparer par l'inclusion les ensembles $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$; puis $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.
 - b. Montrer que l'on peut avoir $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.